МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ПРИСУЖДЕНИЕ СТАЛИНСКИХ ПРЕМИЙ

4 марта 1950 г. было опубликовано Постановление Совета Министров СССР о присуждении Сталинских премий за выдающиеся работы в области науки и изобретательства за 1949 год.

Сталинскими премиями второй степени были отмечены математические работы Векуа Ильи Нестровича, члена-корр. АН СССР, действительного члена АН Груз. ССР, профессора Тбилисского Гос. университета им. И. В. Сталина; Погорелова Алексея Васильевича, доктора физ.-мат. наук, заведующего отделом геометрии института математики и механики Харьковского Гос. университета им. М. Горького.

Сталинской премией второй степени по техническим наукам были отмечены работы: «Общая теория оболочек» и «Строительная механика тонкостенных пространственных фигур» Власова Василия Захаровича, профессора, заведующего отделом строительной механики Института механики Академии наук СССР. В. З. Власов является членом Московского Математического Общества.

Работы И. Н. Векуа

Известно, какое большое значение имеет применение методов теории функций комплексного переменного при изучении ряда задач, связанных с уравнением Лапласа и бигармоническим уравнением. И. Н. Векуа впервые систематически применил мощный аппарат теории функций комплексного переменного для изучения целого класса линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа с аналитическими коэффициентами. При этом важное значение имеют предложенные И. Н. Векуа эффективные способы построения общих интегралов таких уравнении, точнее, линейных операторов, представляющих *любые* решения этих уравнении через голоморфные функции одного комплексного переменного. Эти операторы чётко выявляют структурные особенности всех решений данного эллиптического уравнения и дают возможность обобщить на эти решения ряд свойств голоморфных функций. Благодаря этим представлениям решений И. Н. Векуа удалось изучить весьма общие линейные граничные задачи. Новые методы, развитые И. Н. Векуа, нашли широкие применения во многих разделах математической физики.

Все эти результаты систематически изложены в монографии И. Н. Векуа «Новые методы решения эллиптических уравнений» (М. — Л., Гостехиздат, 1948 г.), удостоенной Сталинской премии. Приведём краткий обзор содержания этой монографии.

а) Найдены формулы, дающие общие представления всех решений уравнения

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0. \qquad (1)$$

(Δ — оператор Лапласа, a, b, c — аналитические функции). Одна из этих формул, дающая все комплексные решения уравнения (1) в односвязной области, имеет следующий вид:

$$u(z, \zeta) = \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int\limits_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau, \qquad (2)$$

где α_0 — произвольная постоянная, $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$ (x, y — комплексные переменные) Φ и Ψ—произвольные аналитические функции, а G — так называемая функция Римана. Доказано существование функции Римана в общем случае и найдено явное её выражение для некоторых частных видов уравнения (1) через специальные функции (функции Бесселя, Лежандра и др.). Следует указать также, что в общем случае функцию G можно вычислить приближённо с помощью довольно быстро сходящегося процесса последовательных приближений.

Из формулы (2) сразу получается фундаментальное решение уравнения (1). С помощью него непосредственно устанавливается аналитический характер всех регулярных решений уравнения (1).

Аналогичные общие представления решений выводятся для случая многосвязной области.

б) Изучены вопросы аппроксимации решений уравнения (1) с помощью простых полных систем его частных решений, которые легко получаются из (2). Известные теоремы об аппроксимации голоморфных функций в рассматриваемой области линейными комбинациями функций вида z^k, $\frac{1}{(z-a)^k}$ переносятся при помощи формулы (2) на случай аппроксимации решений уравнения (1). Получены разложения решений эллиптического уравнения (1) в окрестности данной точки, аналогичные рядам Тейлора и Лорана. Посредством этих разложений удалось ввести естественную классификацию особых точек однозначных решений уравнения (1). Эти разложения дают автору возможность предложить новый способ доказательств формул сложения для специальных функций (например, для функций Бесселя, Лежандра и т. д.).

в) Изучены граничные задачи весьма общего характера, связанные с уравнением (1) в односвязной или многосвязной области. Самой общей является так называемая задача A:

Требуется найти регулярное в области T решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию

$$\sum_{i,\,k=0,\,\dots,\,m}^{i+k\leqslant n} \left[a^{ik}(t)\, u_{ik}(t) + \int\limits_{L} b^{ik}(t, t_1)\, u_{ik}(t_1)\, ds_1 \right] = f(t), \qquad (3)$$

где $u_{ik} = \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}$; *n — неотрицательное целое число, L — граница области T;*

ds_1 — элемент дуги в точке $t \in L$; b^{ik}, a^{ik}, f — заданные на L действительные функции.

Эта задача охватывает все известные граничные линейные задачи для уравнения (1) (задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре и др.). На основании общих представлений решений уравнения (1) и весьма остроумных новых интегральных представлений голоморфных функций задача A приводится к эквивалентному интегральному уравнению, ядро которого явно выражается посредством функции Римана G и коэффициентов граничного условия. Полученное интегральное уравнение, вообще говоря, является сингулярным. Теория таких интегральных уравнений в настоящее время разработана с такой же полнотой, как и теория уравнений Фредгольма.

С помощью предложенного метода выведены весьма важные необходимые и достаточные условия разрешимости задачи A.

Аналогичная задача изучена для систем эллиптических уравнений второго порядка.

г) Приводится общее представление решений дифференциальных уравнений порядка $2n$ вида

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = f(x, y), \tag{4}$$

где L_k — общий линейный дифференциальный оператор порядка k. Ядра интегральных операторов, дающих это общее представление, строятся тоже посредством функции Римана, которая, в частности, для уравнения

$$\Delta^n u + a, \quad \Delta^{n-1} u + \ldots + a_n u = f,$$

где $a_i = \text{const.}$, явно выражается через функции Бесселя.

Изучается основная граничная задача.

Требуется найти регулярное в области T решение $u(x, y)$ уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям

$$u = f_0, \left(\frac{du}{d\nu}\right) = f_1, \ \ldots, \ \left(\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right) = f_{n-1} \ (\text{на } L), \tag{5}$$

где ν — внешняя нормаль границы L области T, а f_i — заданные на L функции.

Эта задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений. Следует отметить, что на эту систему (вообще говоря, сингулярную) распространяются все три теоремы Фредгольма.

д) Полученные результаты применяются к ряду важных задач теории упругости. Рассматриваются плоские задачи стационарных колебаний упругого цилиндра. Наряду с интегральными уравнениями, к которым в этом случае приводятся основные задачи, даются также и эффективные решения этих задач для круговой области и кругового кольца. Найдены общие представления решений уравнений изгиба тонких упругих пластинок, выводятся дифференциальные уравнения тонкой сферической оболочки и строится общее решение этих уравнений посредством функций Лежандра; даются эффективные решения граничных задач в некоторых конкретных случаях. Рассматриваются основные дифференциальные уравнения пологих упругих оболочек. Общие выражения для интегралов этих уравнений строятся в явном виде в случаях сферической и цилиндрической оболочек.

Работы А. В. Погорелова

В теории поверхностей издавна известны проблема реализуемости заданной на сфере метрики положительной кривизны замкнутой выпуклой поверхностью и проблема однозначной определённости замкнутой выпуклой поверхности её метрикой. В терминах теории дифференциальных уравнений они могут быть сформулированы как проблемы существования и единственности решения определённых классов дифференциальных уравнений. Проблема реализуемости получила недавно особенно простое решение при помощи прямых методов теории поверхностей (без сведения к дифференциальным уравнениям), развитых в цикле работ А. Д. Александрова. Проблема однозначной определённости для случая замкнутой поверхности в известном смысле завершена в работе А. В. Погорелова «Однозначная определённость выпуклых поверхностей» (Труды Математического института имени В. А. Стеклова, XXIX, АН СССР, 1949). В этой же работе Погорелова дано решение проблемы однозначной определённости для обширных классов незамкнутых поверхностей. Полученные здесь результаты позволили А. В. Погорелову провести глубокое исследование зависимости свойств регулярности выпуклой поверхности от регулярности её метрики (Доклады Академии Наук СССР, LXVI, 5, 1949 и LXVII, 5, 1949). Эти работы А. В. Погорелова, удостоенные Сталинской премии, содержат следующие конкретные достижения.

а) Доказана теорема об однозначной определённости овалоидов (замкнутых выпуклых поверхностей) ограниченной удельной кривизны.

Следует отметить, что первый результат по проблеме однозначной определённости овалоидов принадлежит С. Э. Кон-Фоссену, который в 1927 г. доказал однозначную определённость овалоидов, ограничивая класс поверхностей сравнения условием кусочной аналитичности. В 1935 году Кон-Фоссен дал доказательство для класса трижды непрерывно-дифференцируемых поверхностей. В 1947 г. А. Д. Александров, основываясь на некоторой интегральной формуле Герглотца, установил однозначную определённость овалоидов в классе поверхностей ограниченной внешней кривизны (что соответствует условию Липшица для первых производных). На этом, повидимому, возможности как метода Кон-Фоссена, так и метода, основанного на использовании интегральных формул, были исчерпаны. А. В. Погорелов получил свой результат при помощи совершенно новой идеи и, как уже сказано, установил однозначную определённость любого овалоида ограниченной удельной кривизны.

Так как ограниченность удельной кривизны есть свойство метрики овалоида, то в теореме А. В. Погорелова класс поверхностей сравнения не ограничен совсем никакими условиями (кроме условия выпуклости). Тем самым результат Погорелова принципиально отличается от всех предыдущих.

б) Доказана однозначная определённость выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны с плоским краем в классе всех выпуклых поверхностей с плоским краем (предполагается, что поверхность однозначно проектируется на плоскость края).

в) Даны оценки всех частных производных радиус-вектора точки регулярной поверхности положительной кривизны в зависимости от внутренней метрики поверхности и расстояния точки поверхности от её края.

г) При помощи результатов, указанных в пунктах 2 и 3 (с привлечением некоторых теорем С. Н. Бернштейна), доказана теорема: если метрика выпуклой поверхности положительной кривизны непрерывно дифференцируема n раз ($n \geqslant 5$), то сама поверхность дифференцируема по крайней мере $n-1$ раз. Если метрика выпуклой поверхности положительной кривизны аналитична, то аналитична и сама поверхность.

В последних теоремах никакой регулярности поверхности заранее не предполагается.

Эти теоремы А. В. Погорелова имеют особенно большое и общее значение потому, что делают прямые методы теории поверхностей (развитые А. Д. Александровым) методами классической дифференциальной геометрии.

д) В принципе те же методы А. В. Погорелова в соединении с методами решения краевых задач позволяют доказать теорему: если уравнение $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ удовлетворяет условию эллиптичности и F имеет непрерывные частные производные по своим аргументам до n-го порядка, то каждое трижды непрерывно-дифференцируемое решение этого уравнения непрерывно дифференцируемо $n+1$ раз.

Это есть существенное дополнение к классическим результатам С. Н. Бернштейна.

е) Доказана однозначная определённость широких классов бесконечных выпуклых поверхностей.

Этот результат получен в предположении, что поверхность имеет ограниченную удельную кривизну. Однако он является новым независимо от условий регулярности, так как до сих пор даже для аналитических поверхностей ни одной теоремы об однозначной определённости бесконечной поверхности не было известно.

Таково в кратких чертах содержание работ по математике, отмеченных в этом году Сталинскими премиями.